École Normale Supérieure
20 Novembre 2019

Topologie, analyse et calcul différentiel

# Partiel

**Exercice 1 Distance SNCF**
On note $|-|$ le module sur $\mathbb{C}$. On munit $\mathbb{C}$ de la distance SNCF définie comme suit :

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| \text{ si } \arg x = \arg y, \\ |x| + |y| \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une distance.

2. La topologie engendrée par $d$ est-elle plus fine ou moins fine que la topologie usuelle ?

3. Soit $X$ un espace toplogique et $f : \mathbb{C} \to X$ une application.
a) Montrer que si $f$ est continue pour la distance SNCF, alors $f$ est continue sur chacune des droites $\mathbb{R}u$, $u \in \mathbb{C}^*$.
b) Réciproquement si les restrictions de $f$ sur chacune des droites est continue, $f$ est-elle continue ?
c) Quelle condition faut-il rajouter pour que $f$ soit continue ?

4. L'espace métrique $(\mathbb{C}, d)$ est-il complet ?

5. L'espace métrique $(\mathbb{C}, d)$ est-il connexe ? Et en cas d'incident (RERB...) : si $x \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}\backslash\{x\}$ est-il connexe ?

6. Montrer que $K \subset \mathbb{C}$ est compact pour la topologie induite par la distance SNCF si et seulement si il est compact pour la topologie usuelle, et $\forall \varepsilon > 0$, l'ensemble $\arg(K \cap \{|z| > \varepsilon\}) \subset [0; 2\pi[$ est fini.

7. (Bonus) Si l'on munit $\mathbb{C}$ de la topologie induite par les inclusions des droites $i_u : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda u$, $u \in \mathbb{C}^*$, cette topologie est-elle métrisable ?

**Exercice 2 Espace métrique des courbes non-paramétrées** Soit $(K, d)$ un espace métrique compact. On note $C([0;1], K)$ l'espace des applications continues dans $K$, muni de la distance supremum $D_\infty(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t\in[0;1]} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. On note $\Phi$ (resp. $\Phi_{\text{str}}$ l'ensemble des applications continues croissantes (resp. strictement croissantes) $\varphi : [0;1] \to [0;1]$ telles que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. Enfin, on note pour $\gamma_1, \gamma_2 \in C([0;1], K)$ :

$$\delta(\gamma_1, \gamma_2) = \inf_{\phi_1, \phi_2 \in \Phi} D_\infty(\gamma_1 \circ \phi_1, \gamma_2 \circ \phi_2).$$

1. Montrer que pour chaque paire $(\phi_1, \phi_2)$ d'éléments de $\Phi$ il existe une unique fonction croissante $\phi \in \Phi$ et une unique fonction 1-lipschitzienne $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ satisfaisant $\theta(0) = \theta(1) = 0$, telles que l'on ait $\phi_1 = \phi - \theta \circ \phi$ et $\phi_2 = \phi + \theta \circ \phi$.

2. On dit que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ s'il existe $\phi_1, \phi_2 \in \Phi$ tels que $\gamma_1 \circ \phi_1 = \gamma_2 \circ \phi_2$. En utilisant Ascoli, montrer que $\delta(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ si et seulement si $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

3. Montrer que $\Phi_{\text{str}}$ est dense dans $\Phi$, en déduire que $\delta(\gamma_1, \gamma_2) = \inf_{\phi \in \Phi_{\text{str}}} D_\infty(\gamma_1, \gamma_2 \circ \phi)$.

4. On note $[\gamma]$ la classe d'équivalence d'un chemin et $\Gamma$ l'ensemble des classes d'équivalence. Montrer que la fonction $\delta$ passe au quotient et définit une métrique sur $\Gamma$.

5. On prend $K = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cerclé unité. On note $\Gamma_{+1,-1} = \{[\gamma] \in \Gamma : \gamma(0) = 1, \gamma(1) = -1\}$. On admet également le théorème de relèvement : si $g : [0;1] \to S^1$ est continue et $g(0) = 1$, il existe une unique fonction continue $h : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(t) = e^{ih(t)}$.
a) Montrer que $W : [\gamma] \in \Gamma \mapsto h(1) \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ (où $h$ est l'unique relèvement de $\gamma$) est continue. (ind. : on pourra montrer que si $D_\infty(\gamma_1, \gamma_2) < 2$, alors $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ ne prend pas la valeur $-1$, puis que que $h_1(1) = h_2(1)$.) En déduire que $\Gamma_{+1,-1}$ n'est pas connexe.
b) Montrer que les $W^{-1}((2k+1)\pi)$ sont connexes.

**Exercice 3 Les Espaces Flimsy (dédicace à R.K. et B.S., membres du DMI)**
Soit $n \geqslant 1$ un entier. On dit qu'un espace topologique est $n$-flimsy lorsque

$$\begin{cases} \forall p < n, \forall x_1, \dots, x_p \in X \text{ deux à deux distincts, } X \backslash \{x_1, \dots, x_p\} \text{ est connexe,} \\ \forall x_1, \dots, x_n \in X \text{ deux à deux distincts, } X \backslash \{x_1, \dots, x_n\} \text{ n'est pas connexe.} \end{cases}$$

Le symbole $A \sqcup B$ désigne l'ensemble $A \cup B$ et signifie que $A \cap B = \emptyset$. On note $A^c$ le complémentaire de $A$ dans $X$.

1. a) Montrer que $\mathbb{R}$ est 1-flimsy.
b) Montrer que $S^1$ est 2-flimsy.
c) Montrer que si $X$ est $n$-flimsy, et $x \in X$, alors $X - \{x\}$ est $(n-1)$-flimsy.

On va montrer qu'il n'existe pas d'espace infini 3-flimsy. (le cas des ensembles finis n'est pas compliqué)

2. Soit $X$ 2-flimsy, $x \neq y \in X$, et une partition

$$\{x, y\}^c = (U_1 \cap \{x, y\}^c) \sqcup (U_2 \cap \{x, y\}^c) \sqcup (U_3 \cap \{x, y\}^c),$$

avec $U_i$ des ouverts de $X$. Soit $u_1 \in U_1 \backslash (U_2 \cup U_3)$ et $u_2 \in U_2 \backslash (U_1 \cup U_3)$. On va montrer que $\{u_1, u_2\}^c$ est connexe. Soit $\{u_1, u_2\}^c = (U \cap \{u_1, u_2\}^c) \sqcup (V \cap \{u_1, u_2\}^c)$ avec $x \in U$.
a) Montrer que $U \cup U_1 \cup U_2$ et $V \cap U_3$ induisent une partition de $\{y\}^c$. En déduire que $(V \cap U_3) \cap \{y\}^c = \emptyset$.
b) Montrer que $y \in U$. (on pourra raisonner par l'absurde et montrer que si $y \in V$, alors $U_3 = \emptyset$.)
c) Montrer que $U \cup U_1$ et $V \cap U_2$ induisent une partition de $\{u_2\}^c$. En déduire que $(V \cap U_2) \cap \{u_2\}^c = \emptyset$.
d) De même montrer que $(V \cap U_1) \cap \{u_1\}^c = \emptyset$ et conclure à la connexité de $\{u_1, u_2\}^c$.
e) En déduire que $\forall x \neq y$, $\{x, y\}^c$ a exactement deux composantes connexes.

3. Soit $X$ 2-flimsy, et $x, s, t$ trois points distincts. On note $C_1(s)$ (resp. $C_1(t)$) la composante de $\{x, s\}^c$ (resp. $\{x, t\}^c$) qui contient $t$ (resp. $s$), $C_2(s)$ (resp. $C_2(t)$) l'autre composante. On va montrer que $D = C_1(s) \cap C_1(t)$ est l'une des composantes de $\{s, t\}^c$.
a) En utilisant la connexité de $\{t\}^c$, montrer que $C_2(t) \cup \{x\}$ est connexe. En déduire que $D^c = (C_2(t) \cup \{x\}) \cup (C_2(s) \cup \{x\})$ est connexe.

On suppose par l'absurde que $D$ n'est pas connexe et on écrit $D = (U \cap D) \sqcup (V \cap D)$ avec $u \in U \cap D \neq \emptyset$ et $v \in V \cap D \neq \emptyset$. L'ensemble $\{u, v\}^c$ n'est pas non plus connexe par flimsitude, donc on l'écrit $(\tilde{U} \cap \{u, v\}^c) \sqcup (\tilde{V} \cap \{u, v\}^c) = \{u, v\}^c$.

b) Montrer que $D^c \subset \tilde{U}$ ou $D^c \subset \tilde{V}$. On supposera que $D^c \subset \tilde{U}$. Remarquer alors que $\tilde{V} \subset D$.
c) Montrer que $(U \cap \tilde{V} \cap \{u, v\}^c) \cup (V \cap \tilde{V} \cap \{u, v\}^c) = \tilde{V} \cap \{u, v\}^c$. En déduire que l'un des deux est non vide. On supposera qu'il s'agit de $(V \cap \tilde{V} \cap \{u, v\}^c)$.
d) Montrer que $U \cup \tilde{U}$ et $V \cap \tilde{V}$ induisent une partition de $\{v\}^c$ et aboutir à une contradiction puis conclure.

4. Supposons par l'absurde que $X$ soit un espace 3-flimsy. Soient $x, y, s, t$ deux à deux distincts. Soit $D = C_1(t) \cap C_1(s)$ où $C_1(t)$ (resp. $C_1(s)$) est la composante connexe de $s$ (resp. $t$) dans $\{x, y, t\}^c$ (resp. $\{x, y, s\}^c$).
a) Montrer que $D$ est à la fois une composante connexe de $\{x, s, t\}^c$ et $\{y, s, t\}^c$.
b) En déduire que $D$ est à la fois ouvert et fermé dans $\{s, t\}^c$ et conclure que $X$ n'est pas 3-flimsy.